Effet de peau dans l'eau de mer.

L'eau de mer est un diélectrique isotrope et homogène de susceptibilité $\chi_e = 80$ (pratiquement constante dans le domaine des fréquences hertziennes), non magnétique et légèrement conducteur, de conductivité $\gamma = 4\,\text{S.m}^{-1}$.

Question 1 :
Justifier que la divergence du champ électrique est nulle.

On a

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0\ \text{div}\,\overrightarrow{E} = \rho = \rho_{\text{liée}} + \rho_{\text{libre}} = -\,\text{div}\,\overrightarrow{P} + \rho_{\text{libre}} = -\varepsilon_0\,\chi_e\ \text{div}\,\overrightarrow{E} + +\rho_{\text{libre}}$$

d'où, avec $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$

$$\varepsilon_0\,(1+\chi_e)\ \text{div}\,\overrightarrow{E} = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\ \text{div}\,\overrightarrow{E} = \rho_{\text{libre}} \qquad \text{(équation 1)}$$

Par ailleurs, la conservation de la charge libre (même dans le cas où se créent des charges libres, par ionisation par exemple, il se forme autant d'électrons que d'ions positifs et la charge totale des porteurs ne varie pas) conduit à, sachant que c'est, bien sûr, $\overrightarrow{j}_{\text{libre}}$ qui suit la loi d'Ohm

$$0 = \frac{\partial \rho_{\text{libre}}}{\partial t} + \text{div}\,\overrightarrow{j}_{\text{libre}}$$

$$0 = \frac{\partial \rho_{\text{libre}}}{\partial t} + \gamma\ \text{div}\,\overrightarrow{E}$$

$$0 = \frac{\partial \rho_{\text{libre}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}\,\rho_{\text{libre}}$$

ce qui prouve que ρ_{libre} tend vers 0 avec une constante de temps $\tau = \varepsilon_0\,\varepsilon_r/\gamma = 0,18\,10^{-9}$ s

c'est-à-dire instantanément. On reporte $\rho_{\text{libre}} = 0$ dans l'équation 1 et l'on en déduit $\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0$

Question 2 :
Par rapport à un métal, quelle approximation cesse* a priori *d'être valable dans l'équation de Maxwell-Ampère ? Etablir la relation de dispersion.

Du fait de la médiocre conductivité de l'eau, on ne peut plus négliger $\varepsilon_0\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ devant $\overrightarrow{j}$. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit donc

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\overrightarrow{j_{\text{liée}}} + \overrightarrow{j_{\text{libre}}} + \varepsilon_0\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t} + \gamma\,\overrightarrow{E} + \varepsilon_0\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\varepsilon_0\,\chi_e\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \gamma\,\overrightarrow{E} + \varepsilon_0\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$$

$$= \mu_0\left(\gamma\,\overrightarrow{E} + \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$$

Pour trouver la relation de dispersion, on utilise la méthode standard

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\overrightarrow{E}\right) - \Delta\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}}{\partial t}$$

La divergence de $\overrightarrow{E}$ est nulle, on simplifie, on change de signe et l'on reporte l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\Delta\overrightarrow{E} = \frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial z^2} = \mu_0\left(\gamma\,\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} + \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}\right)$$

Pour une onde en $\exp\jmath(\omega\,t - k\,x)$, en remplaçant $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ respectivement par $\jmath\,\omega$, $-\jmath\,k$, 0 et 0 :

$$-k^2\,\overrightarrow{E} = \mu_0\,(\jmath\,\gamma\,\omega\,\overrightarrow{E} - \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\omega^2\,\overrightarrow{E})$$

d'où l'on tire après simplification et avec $\mu_0\,\varepsilon_0\,c^2 = 1$ et $\varepsilon_r = n^2$

$$k^2 = \frac{n^2\,\omega^2}{c^2} - \jmath\,\mu_0\,\gamma\,\omega$$

Question 3 :
Quelle est la distance caractéristique d'amortissement ? Pour communiquer avec un sous-marin vaut-il mieux se placer vers 1 kHz, 1MHz ou 1GHz ? Est-ce que ce sera facile ?

La relation de dispersion montre que k est complexe. On sait que si l'on note $k = k' - \jmath\,k''$ alors

$$E = \mathfrak{Re}\left[E_0\,\exp\jmath\left(\omega\,t - (k' - \jmath\,k'')/,x\right)\right] = E_0\,\exp(-k''\,x)\,\cos(\omega\,t - k'\,x)$$

et la distance caractéristique est $\delta = 1/k''$

Il est malaisé de trouver la racine d'un complexe, aussi, avant d'aborder le cas général explorons de possibles approximations selon que $n^2\,\omega^2/c^2$ est grand ou petit devant $\mu_0\,\gamma\,\omega$, soit ω grand ou petit devant $\mu_0\,c^2\,\gamma/n^2 = \gamma/\varepsilon_0\,\varepsilon_r = 1/\tau = 5,6\,10^9\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$ soit une fréquence f grande ou petite devant $f_c = \gamma/2\,\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r = 0,89\,\mathrm{GHz}$

Pour $f > 100\,f_c$, mieux que $k \approx \omega/c$, il faut effectuer un développement limité à l'ordre 1 pour extraire la partie imaginaire mais c'est ici illusoire, car pour ces fréquences, on se rapproche de la bande d'absorption de l'eau et l'on ne peut plus considérer χ_e comme constant.

Pour $f < f_c/100 \approx 10MHz$, donc pour 1 kHz et 1 MHz, l'approximation «métal» évoquée à la question 2 est en fait valable et

$$k^2 \approx -\jmath\,\mu_0\,\gamma\,\omega = \mu_0\,\gamma\,\omega\,\exp\left(-\jmath\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où

$$k \approx \sqrt{\mu_0\,\gamma\,\omega}\,\exp\left(-\jmath\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\mu_0\,\gamma\,\omega}\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \jmath\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

d'où

$$k' = k'' = \sqrt{\frac{\mu_0\,\gamma\,\omega}{2}} \qquad \text{et} \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\,\gamma\,\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\mu_0\,\gamma\,f}}$$

A.N. à 1 kHz $\delta = 8,0\,\mathrm{m}$ et à 1 MHz $\delta = 0,25\,\mathrm{m}$; en rappelant que l'onde est en pratique étouffée au bout de $7\,\delta$, on voit la faible portée des ondes hertziennes dans l'eau. Il vaut mieux travailler en basse fréquence, mais dans ce cas on ne peut pas moduler par des fréquences vocales (il faut en effet que la porteuse ait une fréquence bien plus élevée que le signal), tout au plus peut-on espérer passer des informations en morse entre le sous-marin et un bâtiment en surface à la verticale. Autant dire que le sous-marin est coupé du monde avec les conséquences préoccupantes qu'on imagine (cf «Docteur Folamour» de Stanley Kubrick).

Pour f=1 Ghz, aucune approximation n'est possible et il faut passer par les fourches caudines d'une extraction de racine carrée dans $\mathbb{C}$. Si l'examinateur est sympathique, sur l'application numérique, sinon littéralement. Mettons ici les choses au pire :

$$k^2 = (k' - \jmath\, k'')^2 = k'^2 - k''^2 - 2\,\jmath\, k'\, k'' = \frac{n^2\,\omega^2}{c^2} - \jmath\,\mu_0\,\gamma\,\omega$$

d'où en égalant parties réelles et imaginaires

$$k'^2 - k''^2 = \frac{n^2\,\omega^2}{c^2} \qquad \text{et} \qquad 2\,k'\,k'' = \mu_0\,\gamma\,\omega$$

d'où $k' = \mu_0\,\gamma\,\omega/2\,k''$ et

$$(\mu_0\,\gamma\,\omega/2\,k'')^2 - k''^2 = \frac{n^2\,\omega^2}{c^2}$$

$$k''^4 + \frac{n^2\,\omega^2}{c^2}\,k''^2 - \frac{\mu_0^2\,\gamma^2\,\omega^2}{4} = 0$$

d'où, puisque k''^2 est positif

$$2\,k''^2 = -\frac{n^2\,\omega^2}{c^2} + \sqrt{\frac{n^4\,\omega^4}{c^4} + \mu_0^2\,\gamma^2\,\omega^2}$$

etc.

et, sauf erreur de calcul de ma part, on trouve $\delta = 23$ mm à 1 GHz.

Question 4 :

Donner, en fonction de x, k', k'' et E_0, amplitude de l'onde, l'expression de la puissance volumique moyenne absorbée.

On a, par exemple $\overrightarrow{E} = E_0\,\exp \jmath(\omega\,t - k\,x)\,\overrightarrow{e_y}$, d'où classiquement à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{B} = \frac{k}{\omega}\,E_0\,\exp \jmath(\omega\,t - k\,x)\,\overrightarrow{e_z}$$

On revient aux parties réelles avant toute multiplication («Tu ne multiplieras pas les amplitudes complexes», dit la Loi), soit si $k = k' - \jmath\,k''$:

$$E_y = E_0\,\exp(-k''\,x)\,\cos(\omega\,t - k'\,x)$$

$$B_z = \frac{k'}{\omega}\,E_0\,\exp(-k''\,x)\,\cos(\omega\,t - k'\,x) + \frac{k''}{\omega}\,E_0\,\exp(-k''\,x)\,\sin(\omega\,t - k'\,x)$$

$$\Pi_x = \frac{k'}{\mu_0\,\omega}\,E_0^2\,\exp(-2\,k''\,x)\,\cos^2(\omega\,t - k'\,x) + \frac{k''}{\mu_0\,\omega}\,E_0^2\,\exp(-2\,k''\,x)\,\cos(\omega\,t - k'\,x)\,\sin(\omega\,t - k'\,x)$$

$$\mathcal{I} = \langle \Pi_x \rangle = \frac{k'}{2\,\mu_0\,\omega}\,E_0^2\,\exp(-2\,k''\,x)$$

Faisons maintenant un bilan d'énergie pour un cylindre de surface de base S entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Par la première face, il entre la puissance $S\,\mathcal{I}(x)$ et par la seconde il sort $S\,\mathcal{I}(x + \mathrm{d}x)$. La puissance absorbée est donc :

$$S\,\mathcal{I}(x) - S\,\mathcal{I}(x + \mathrm{d}x) = -S\,\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

pour un volume $S\,\mathrm{d}x$, d'où la puissance volumique absorbée

$$\mathcal{P}_v = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}}{\mathrm{d}x} = \frac{k'\,k''}{\mu_0\,\omega}\,E_0^2\,\exp(-2\,k''\,x)$$

où, pour faire plaisir aux chimistes, l'on reconnaît la loi de Beer-Lambert.